漸化式攻略プリント

kakekakemiya

はじめに

　このプリントは、習った後どんどん記憶が薄れてしまっていく人が多い数列の漸化式分野を一気に復習するためのプリントです。
　このプリントに載っている漸化式を倒せるようになれば、定期テスト、共通テストレベルあれば「漸化式さっぱりわからん…。0 点や…。」となることがないくらいの網羅性を意識していますが、細かい知識は各自補っていってください。
　そして、このプリントでは、どうしてその一般式になるかをしっかりと書いているので、それを自力で再現できるように練習してください。[*1]

等差型

$$a_{n+1} = a_n + d$$

という形をしたものです。これはきっと大丈夫でしょうが、一応確認しておくと、

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + d \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + d \\ &\vdots \\ a_3 &= a_2 + d \\ a_2 &= a_1 + d \end{aligned}$$

と並べてあげて、すべてをそのまま足してあげると、

$$\begin{aligned} a_n &= \cancel{a_{n-1}} + d \\ \cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} + d \\ \cancel{a_{n-2}} &= \cancel{a_{n-3}} + d \\ &\vdots \\ \cancel{a_3} &= \cancel{a_2} + d \\ \cancel{a_2} &= a_1 + d \end{aligned}$$

＼の部分が消え、残るのは、$a_n = a_1 + d\,(n-1)$ ですね。[*2]
　よって、等差型 $a_{n+1} = a_n + d$ の一般解は $a_n = a_1 + d\,(n-1)$ となります。

[*1] 再現できるようになれば公式覚えなくてもいいです。とりあえず脱丸暗記です。
貴重な脳の暗記スペースは英単語、化学、社会科目とかに使いましょう。
[*2] $d\,(n-1)$ は d が $n-1$ 個だからです。

等比型

$$a_{n+1} = ra_n$$

という形をしたものです。これも同じ考え方で大丈夫ですね。

$$\begin{aligned}
a_n &= ra_{n-1} \\
a_{n-1} &= ra_{n-2} \\
a_{n-2} &= ra_{n-3} \\
&\vdots \\
a_3 &= ra_2 \\
a_2 &= ra_1
\end{aligned}$$

と並べて、今度は全部かけてあげると、

$$\begin{aligned}
a_n &= r\,\cancel{a_{n-1}} \\
\cancel{a_{n-1}} &= r\,\cancel{a_{n-2}} \\
\cancel{a_{n-2}} &= r\,\cancel{a_{n-3}} \\
&\vdots \\
\cancel{a_3} &= r\,\cancel{a_2} \\
\cancel{a_2} &= r\,a_1
\end{aligned}$$

となり、残るのは、$a_n = r^{n-1}a_1$ ですね。よって、等比型 $a_{n+1} = ra_n$ の一般解は $a_n = r^{n-1}a_1$ ですね。

$p\,a_n + q$ 型 (特性方程式型)

　等差、等比が倒せるようになったわけですが、次に、難しくしようと思ったら、等差と等比を組み合わせたもの即ち、

$$a_{n+1} = p\,a_n + q$$

という形でしょう。

　これは、a_{n+1}, a_n を α に置き換えた α についての方程式[*3]

$$\alpha = p\,\alpha + q$$

の解を求め、その α を用いて、

$$a_{n+1} - \alpha = p\,(a_n - \alpha)$$

としてやれば良い。と**覚えた**でしょう。

　しかし、なぜこれでうまくいくのかをしっかり説明できるでしょうか？できない！怪しい！というかたは是非ここからの部分をしっかり理解してください。

[*3] これを特性方程式といいます。

なぜ特性方程式を考えればうまくいくか

$$a_{n+1} = p\,a_n + q$$

という形は、先述の通り等比と等差を組み合わせたかたちですね。当然等差と等比の公式は使えないわけですが、なんとかして等比型の公式が使える形に持っていけないか考えます。[*4]そこで、以下のように考えてみます。

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= p\,a_n + q \\ \alpha &= p\,\alpha + q \end{aligned}$$

と並べた上で、辺々引いてあげると

$$a_{n+1} - \alpha = p\,(a_n - \alpha)$$

となりますね。そしてこれは、$b_n = a_n - \alpha$ という新しい数列として考えてあげれば、

$$b_{n+1} = p\,b_n$$

という**等比数列になっています。**これにより、前述の等比数列のフィールドに持ち込むことができ、倒せるのですね。[*5]

よって今後は、「特性方程式を解いて、その解を引き算するとうまくいく！」なんて覚え方ではなく、上の流れを意識して解くようにしてください。

和から一般項

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ として、

$$S_n = (n \text{ の式}) = f(n)$$

の時、a_n を求めよ。というやつです。

これは、和 S_n から一般項 a_n を求めるため、和から一般項型と呼びます。説明の都合上、n の式 を $f(n)$ と置きました。

これはどうすれば a_n が出せるでしょうか？ちょっと考えてから読み進めてみてください。

ただの S_n のままでは a_n は求められないので、

$$\begin{aligned} S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots a_2 + a_1 \\ S_{n-1} &= \phantom{a_n +{}} a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots a_2 + a_1 \end{aligned}$$

こう並べて考えてみると、もうお分かりですね、辺々引いてあげれば、

$$\begin{aligned} S_n &= a_n + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_{n-2}} + \cdots \cancel{a_2} + \cancel{a_1} \\ S_{n-1} &= \phantom{a_n +{}} \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_{n-2}} + \cdots \cancel{a_2} + \cancel{a_1} \end{aligned}$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ が得られます。から、それはすなわち $a_n = f(n) - f(n-1)$ を意味します。

[*4] 等比に殴り込むのはハイレベル問題だと 1 つの狙いとなり得るくらい強いです。

[*5] この方法は物凄く賢い考え方に感じるので、僕は別の導入の方が好きなのですが、そちらは文字に起こすとちょっと長くなるのでこっちにしました。気になる人は聞いてください。

ここまでできたらOK！素晴らしい！と言いたいところなのですが、実はこれは満点回答ではありません。どこがやばいかというと、$n=1$ のときですね。

上記の論法だと、$n=1$ のときは S_0 が必要になるのですが、$S_0=\displaystyle\sum_{k=1}^{0} a_k$ ←!?!?となるので、使ってはなりません。[*6]

というわけで、$n=1$ の時は別個に考える必要がありますが、ここは難しくないというかむしろ簡単で、

$$a_1 = S_1 = f(1)$$

でOKです。[*7]

以上をまとめると $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ として、

$$S_n = (n\text{ の式}) = f(n)$$

の時、a_n を求めよ。という問題は、

$$a_n = \begin{cases} f(1) & (n=1\text{ のとき}) \\ f(n)-f(n-1) & (n\geq 2\text{ のとき}) \end{cases}$$

で倒せます。

$p\,a_n + f(n)$ 型

$$a_{n+1} = p\,a_n + f(n) = p\,a_n + (an+b)$$

今回は $f(n)=an+b$ の形の場合を考えます。この辺りからちょっと表情が曇ってくる方もいるかもしれませんね。

これまで導入した考え方をちょっとずつ使います。まず、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= p\,a_n + an + b \\ a_n &= p\,a_{n-1} + a(n-1) + b \end{aligned}$$

と並べてみて、辺々を引いてあげます。すると、

$$a_{n+1} - a_n = p\,(a_n - a_{n-1}) + a$$

が得られます。

これは**ただの特性方程式型**なので、$a_{n+1}-a_n$ の一般項が求められますね。仮にそれを $g(n)$ としてあげると、$a_{n+1}-a_n=g(n)$ となるわけですが、

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + g(n-1) \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + g(n-2) \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + g(n-3) \\ &\vdots \\ a_3 &= a_2 + g(2) \\ a_2 &= a_1 + g(1) \end{aligned}$$

[*6] 実力があれば、拡張からの正当化ができなくもないですが、とりあえずは禁忌だと思ってください。

[*7] 馬鹿みたいな話ですが、$S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$ という意味です。

等比数列の時の考え方を思い出して並べてから足してあげると

$$
\begin{aligned}
a_n &= \cancel{a_{n-1}} + g(n-1)\\
\cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} + g(n-2)\\
\cancel{a_{n-2}} &= \cancel{a_{n-3}} + g(n-3)\\
&\vdots\\
\cancel{a_3} &= \cancel{a_2} + g(2)\\
\cancel{a_2} &= a_1 + g(1)
\end{aligned}
$$

$a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} g(k)$ が得られます。[*8] この辺りから、流れを掴むことの重要性が感じられてくるかと思います。

幽霊型

$$a_{n+1} = p\,a_n + q^n$$

の形をしたものです。q の肩に q^n が乗ってなければただの特性方程式型なのに…。この「邪魔な幽霊め！」ということで、幽霊型といいます。

　こいつの倒し方ですが、名の通り幽霊を祓うだけです。両辺を q^{n+1} で割ってあげると（←唯一にして最大のポイント）

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q}\frac{a_n}{q^n} + \frac{1}{q}$$

ちょっと見た目がいかついですが、$\dfrac{p}{q} \to \alpha, \dfrac{1}{q} \to \beta$ と書き直してあげると

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \alpha\frac{a_n}{q^n} + \beta$$

これはもう**特性方程式型**ですね！[*9] ということで、幽霊型は倒せたことになります。

ライザップ型

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{qa_n + p}$$

の形をした漸化式です。これの倒し方なのですが、ちょっと面白くて、辺々の逆数を取ります。[*10] すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a^{n+1}} &= \frac{qa_n + p}{a_n}\\
\frac{1}{a^{n+1}} &= \frac{qa_n}{a_n} + \frac{p}{a_n}\\
\frac{1}{a^{n+1}} &= p\,\frac{1}{a_n} + q
\end{aligned}
$$

となります。これは、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ としてあげれば、

$$b_{n+1} = p\,b_n + q$$

[*8] $a_{n+1} - a_n$ なので、**階差数列**として公式を使うのが一般的なのですが、階差より並べた方がわかりやすいしミスも減ると思うのでこれでやりました。

[*9] 見にくい人は、$\dfrac{a_n}{q^n}$ を b_n と置いてみてください。$b_{n+1} = \alpha\,b_n + \beta$ となります。

[*10] 厳密には、その前に $a_n \neq 0$ を確認しないといけないので注意してください。

すなわち特性方程式型ですね。

さて、これをなぜライザップ型と呼ぶかですが、もとの形

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{qa_n + p}$$

が△に見えるのに対し、

$$\frac{1}{a^{n+1}} = \frac{qa_n + p}{a_n}$$

は見事な逆三角形▽になっているからです。

醜い下半身太りはライザップをして逆三角形にしてしまおう！と覚えてください。[*11]

終わりに

何となくのテンションで作ってみたプリントですが、少しでも漸化式の理解のお役に立てれば幸いです。一応、a_{n+1}が a_n で表される形の基本問題は全て網羅しましたが、今回扱っていないが重要なものとして**二種類以上の漸化式が絡むもの、隣接三項間漸化式**がありますので、そちらは復習しておくようにしてください。[*12]

また、ここで登場した呼び名は、僕の高校時代の数学の先生が使っていたものなので、一般的でないものがほとんどであることに注意してください。とても覚えやすいいい名前ばかりですよね。

なお、復習用にいくつか問題をつけておきました。ご活用ください。

それでは良い漸化式ライフを！

復習用問題

以下についてそれぞれ a_nを求めよ。

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$として、$S_n = 2n^2 - n + 1$
2. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$
3. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$
4. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n + 3}$

復習用問題答え

1. $a_1 = 2$　$n \geq 2$ のとき $a_n = 4n - 3$
2. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - n$
3. $a_n = 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n$
4. $a_n = \dfrac{1}{3^n - 2}$

[*11] 僕が習ったときは、富士山型と呼んでいたのですが、流行に乗って変えたそうです。

[*12] 気が向いたらプリント作るかもしれません。