Q

$$S=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)$$

を求めよ。

はじめに

これ、できましたか？

素直に展開して、$k^4+6k^3+11k^2+6k$を求めるなんて言う渋い問題は出しませんよ :-)

尚、ガチで計算する際には、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$が必要となります。

> ※正味使うことはないですが、これを導出する方法は頭に浮かんでほしいです。

しかし、ガチ計算しないとなると、どうやって求めればいいのか…となります。

まだ解けてない人はそれを踏まえた上で自分なりにやり方を考えてみてから、答えに進んでください一

解答

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}$$

$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

解説

いかがでしょうか？自力で解けていなかった場合はまだ解答もよくわかっていないと思うので、解説していきます。

まず、行間をちょっと埋めたverを載せます。

求める和をS_nとおく。

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{1 \times k(k+1)(k+2)(k+3)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{\frac{(k+4)-(k-1)}{5} \times k(k+1)(k+2)(k+3)\}$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{n} \{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) - (k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}$$

$f(k) = (k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)$ とおくと、

$$S_n = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{n} \{f(k+1) - f(k)\}$$

> ここでわかると思いますが、差分を作るのが狙いでした！

$$\therefore S_n = f(n+1) - f(1) = f(n+1) - 0 = \frac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

以上のような流れです。いかがでしたでしょうか？

ポイントは、

- 差分を無理やり作ること
- $f(1) = 0$がうまくつかえること

です。

まとめ

この問題がそのまま入試に出ることはほぼ100%ないでしょうが、この変形はテクニックとして覚えておくべきです。

というのは、これは四連続の和でに限らず、一般の連続整数の和に対して使えるからです。

普通の出し方よりもはやく、計算ミスのリスクも少なく、因数分解後の形で解を得られるという美味しいテクです。

advancedな見解

- 連続n整数の和は、各々が$k!(0 \leq k \leq n)$の約数なので、その結果も...？
- 一般のnについて成立するわけですから、m連続整数の和でもやってみるとためになります。