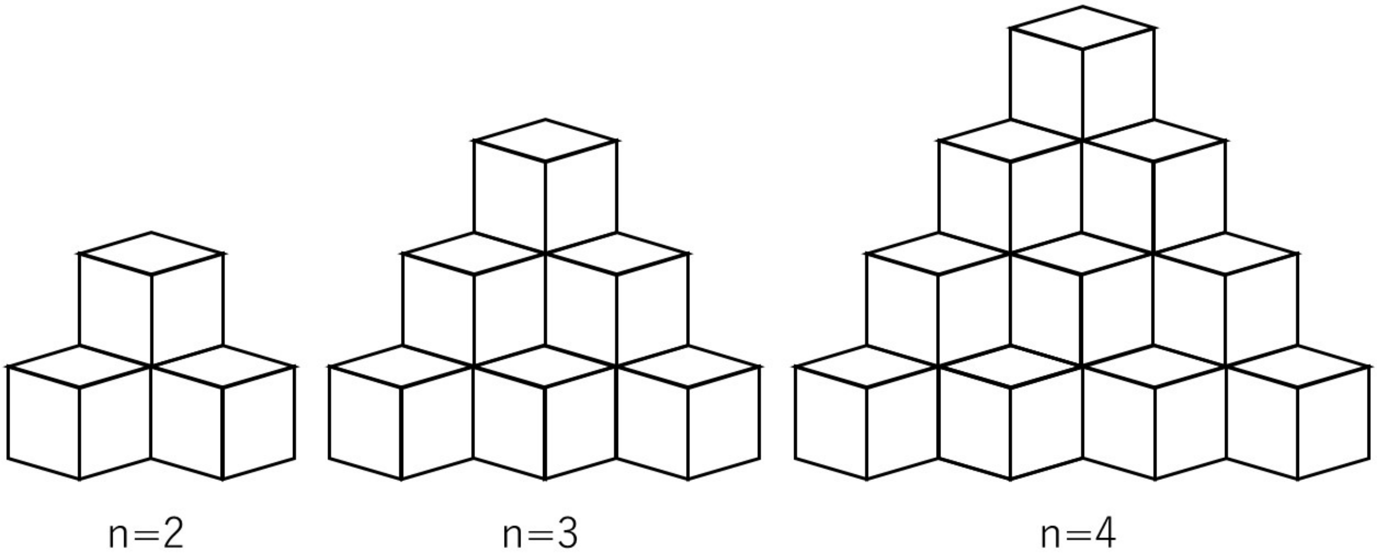
Q1

以下のようなn段の階段状の立体を考える。

この立体を作るのに必要なブロックの個数を $T(n)$ とするとき、$T(n)$ をnの式で表せ。



(※ $T(2)=4,\ T(3)=10,\ T(4)=20$ である。)

Q2

自然数nに対して $a+b=n$ を満たす自然数の組 (a,b) をすべて考えるとき、$a\times b$ の和をnの式で表せ。

解答

Q1

上からn段目のブロックの数は、$\dfrac{n(n+1)}{2}$である。 よって求める個数は、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2\cdot 3}\sum_{k=1}^{n}\{(k+2)(k+1)k-(k+1)k(k-1)\}=\underline{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$$

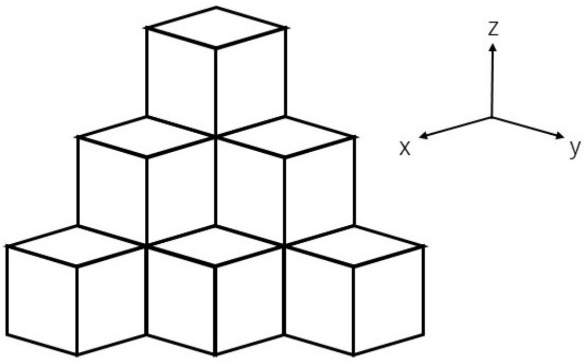
Q2

$b=n-a$故、求める和は

$$\sum_{a=1}^{n-1}a(n-a)=n\cdot\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{n(n-1)(3n-2n+1)}{6}=\underline{\frac{(n-1)n(n+1)}{6}}$$

別解（是非読んでください）

Q1



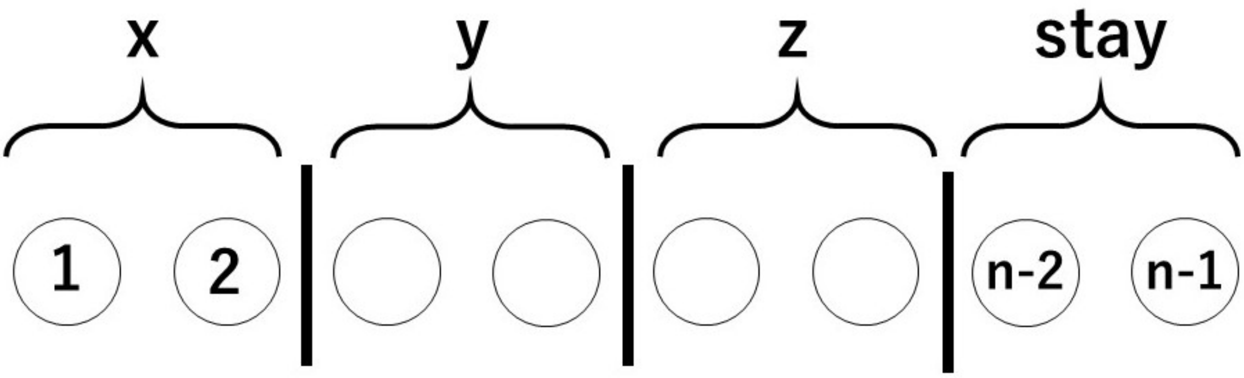
上図の方向にxyz軸を設定すると、n段の階段は以下に定義する「操作A」

操作A

- x方向に$+1$
- y方向に$+1$
- z方向に$+1$
- **移動しない** $\leftarrow$ポイント

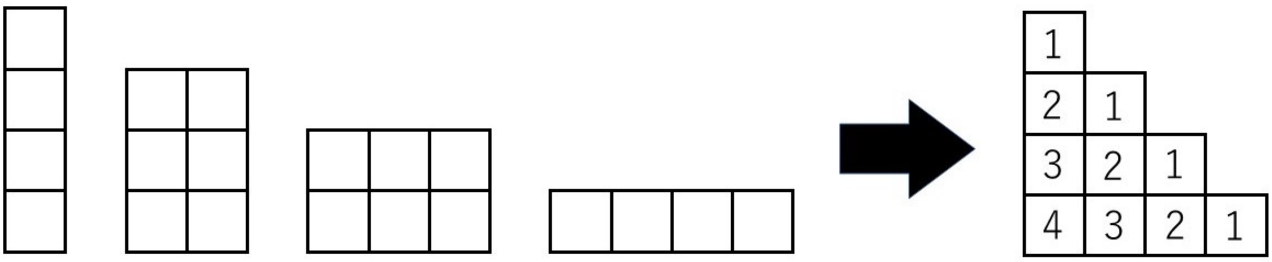
という四種類の動きのうち一つを行う

を$(n-1)$回行った結果たどり着くブロックを表現しているので、$(n-1)$個の ○ と3個の | を並べる場合の数に等しい。



よって ${}_{n+2}C_3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Q2



求めるべき和は、図のように1×1の正方形を並べた時の面積の総和と捉えられるが、それは図右側のように重ね合わせるとQ1での $(n-1)$段の立体に帰着できる。 (図は$n=5$の場合)

よって求める和は $T(n-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$