ランダウ物理学概論

HY

3　相対論的力学

3.1　光速度不変の原理

古典力学では相互作用の伝播は瞬間的に行われるものと仮定した。つまり、電荷や質点を配置した瞬間に場のポテンシャルエネルギーは一瞬で変化してしまうと捉えていた。しかし、これは現実の結果と合わない。例えば、十分大きな電荷を高周波数で振動させて場を高速で変化させていけば場は波打って変動する。*[1]すなわち、相互作用の（最大）伝播速度は有限である。これを**光速度** c と呼ぶ。光速度は任意の慣性基準系で同一であることが数々の実験で明らかにされている。この事実は**相対性原理**から要請される仮定でもあり、**光速度不変の原理**と呼ばれる。

古典極限 $(c \to \infty)$ においては時刻は各慣性基準系において絶対的な基準としてふるまっていたが、光速度不変の原理が成り立つ以上、時刻すらも空間同様どの慣性基準系を選ぶかによって値が異なる相対的な物理量となってしまう。*[2]しかし、物体の運動を解析する上で慣性基準系の間の絶対基準となる物理量の存在は必須である。今節ではそれを導く。

慣性基準系 K において、光（相互作用）が時空点 $1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ から $2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ に伝播したとき、

$$c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

が成り立つ。K 以外の任意の慣性基準系 K' においても同様の等式が成立する。つまり、

$$c(t'_2 - t'_1) = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$$

である。よって、$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ とすると $s_{12} = s'_{12}$ である。この s_{12} は点 $1, 2$ の間の**世界間隔**と呼ばれる。これは相対論的力学における絶対的な物理量なので、

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = cdt\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

は古典力学における時間微分 dt と同等の役割を果たす。例えば、古典力学における速度、加速度等の「ある

*[1] これが電荷が一定の加速度で運動する際に電磁波が生じる過程である。

*[2] 例えば、ある慣性基準系 K に対して x 軸方向に等速度 $\boldsymbol{V} = (V, 0, 0)(V > 0)$ で移動する慣性基準系 K' をとる。K の原点に光源をとると、2 点 $\mathrm{A}(1, 0, 0)$ と $\mathrm{B}(-1, 0, 0)$ に光が到達する時刻は K においては同じ値である。しかし、K' においては点 B より先に点 A の方に早く光が到達する。

物理量の時間変化」を相対論的に計算する場合は dt で割るのではなく $\frac{ds}{c}$ で割ることになる。[*3]

[*3] $\frac{ds}{c}$ は特に**固有時間**と呼ばれる。実は特殊相対論の世界において、各慣性基準系において等しい値をとる（ローレンツ変換に対して不変）な物理量はこの世界間隔・固有時間に限られる。

3.2 場の中の電荷

前節より、一般に $ds \leq cdt$ なので、$s_{12} = \int_1^2 ds$ が最大になるのは $ds = cdt$、つまり物体がある慣性基準系に対して静止しているとき（すなわち等速直線運動しているとき）に世界間隔は最大になる。この事実と第 1 章で学んだ「自由粒子の（等速度）運動が実現する際、作用は慣性基準系によらず極小になる」ことを踏まえると、系の作用は $-\int_1^2 ds$（のスカラー倍）と記述できると分かる。[*4] よって、自由粒子に対する作用は

$$S = -\alpha \int_1^2 ds = -\alpha c \int_1^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt$$

と表せる。最後の形における被積分関数がラグランジアンである。比例定数 α の値を導く際、古典極限への移行は有効である。v が c に比べて十分小さい場合

$$L \simeq -\alpha c \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

となる。古典極限においてこれは $\frac{mv^2}{2}$ に一致するので係数比較すると $\alpha = mc$ と分かる。しかし、このときラグランジアンに定数項 $-mc^2$ が生じることに留意すべし。[*5] 結局、相対論的力学での自由質点の S, L は

$$S = -mc \int_1^2 ds, \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

と表せる。場からの相互作用を受ける場合、作用積分の中に位置、時間による補正項が加えられる。

$$S = \int_1^2 \left(-mcds + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dr} - e\phi dt\right) = \int_1^2 \left(-mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} - e\phi\right) dt$$

このときのポテンシャル $(\phi, \boldsymbol{A})$ のうち、ϕ を場の**スカラー・ポテンシャル**、$\boldsymbol{A}$ を場の**ベクトル・ポテンシャル**と呼ぶ。また、比例定数 e は粒子の性質に依存するパラメーターであり、**電荷**と呼ばれる。以降、最後の形における被積分関数すなわちラグランジア L を用いて各物理量を導出する。

[*4] ここのポイントは最小作用の原理が慣性基準系によらないという点である。相対論において、運動経路に依存し、かつ慣性基準系によらないような物理量は世界間隔（固有時間）をおいて他にない。

[*5] この定数項から静止エネルギーの存在が明らかにされる。例えば、自由粒子の運動量は