# ランダウ物理学概論

HY

## 1　解析力学

### 1.1　最小作用の原理

物体の力学的状態は位置 $q(t)$ と速度 $q'(t)$ の 2 つのパラメータを以て確定する。つまり、運動に関するあらゆる量は位置 $q(t)$ と速度 $q'(t)$ の 1 価関数であり、そのうち加速度 $q''(t)$ を $q(t), q'(t)$ で表した式を特に「運動方程式」と呼ぶ。ここで、物体の運動に関するあらゆる情報をもつ物理量を $L$ とすると、$L$ はやはり $q(t)$ と $q'(t)$ の関数である。$L(t; q, q')$ は「運動固有量」とも呼べる量であり、あらゆる力学の問題は「$q, q'$ が与えられる→ $L$ を求める→得たい情報を $L$ から抽出する」という一意的な手順を踏んで解くことができる。

$L(t; q, q')$ の具体的な形を考える上で、動力学の原理を静力学からのアナロジーで導く。
静的な場の中で物体が静止する場合、「静止する位置」としての候補は無数に考えられる。しかし、実際に静止するのは「ある条件」を満たす位置に限られる。それは端的に言うと「ポテンシャルエネルギー $U$ が極小値をとる点」である。この事実を動力学にも当てはめて考える。
物体が 2 つの時空点 $(x_1, t_1), (x_2, t_2)$ の間を運動する場合、「運動経路」[*1]としての候補が無数に考えられるが、やはり実際に実現する経路は 1 つに限られる。この経路は「なんらかの物理量 $S$ が極小値をとる点」という条件を満たしていると推測できる。このような $S$ は物体の運動を必要十分的に決定するという点で運動固有量 $L$ と共通している。

＃図挿入

[*1] このとき、運動経路とは地図上の道のような静的な視覚情報の意味ではないことを注意しておく。仮に、そのような意味でしか運動経路を捉えないとすると、時空点間を結んだ線分上を高速で往復して $(x_2, t_2)$ に至る運動と単なる等速直線運動とを区別することもできない。結局、運動経路には、各時刻における物体の速度という動的情報も含まれる必要がある。

$L$ と $S$ の違いは、$L$ が各時刻 $t$ における $q(t), q'(t)$ に対して決まるのに対し、$S$ は $t_1 < t < t_2$ という幅をもった時間帯における $q(t), q'(t)$ から定められる点にある。一連の条件を満たすような $S$ は

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t; q, q')dt$$

に限られる。[*2] ここから、我々は「物体はなるべく $S$ の値が小さくなるように運動する」という動力学の描像を得られる。一般に、$S$ は**作用**と呼ばれ、この原理は**最小作用の原理**と呼ばれる。

この原理と変分法の簡単な計算から、以下のように運動方程式が導かれる。
$S$ が極小値をとるとき、運動経路の微小変分 $\delta q, \delta q'$ に対して S は変化しないので、

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t; q+\delta q, q'+\delta q')dt - \int_{t_1}^{t_2} L(t; q, q')dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial q'}\delta q' \right) dt = 0$$

第 2 項を部分積分する。このとき、端点 $t = t_1, t_2$ においては位置 $q(t)$ はそれぞれ $x_1, x_2$ に固定されているため $\delta q = 0$ であることに注意すると、

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'}\delta q \right) dt = 0$$

となる。微小変分 $\delta q$ をどのようにとってもこの等式は成立するので、[*3]

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} = 0$$

これは一般的な運動方程式であり、**Euler-Lagrange の運動方程式**と呼ばれる。一般的というのも、ここまでの議論で我々は座標系 $q$ に関する制限を何ら設けなかったため、この式はあらゆる座標系において適用可能なわけである。デカルト座標系を適用した場合は、読者諸君のよく知る Newton の運動方程式 $F = ma$ が導かれる。[*4]（具体的な導出は次節で行う）

[*2] 真面目に考えると、やや乱暴な議論である。事実、線形変換程度の不定性はあるが、どのパターンでも得られる式が同一である以上、以降の議論をなるべく簡単にするためこの関係式にしておくのが賢明である。

[*3] 微小変分 $\delta q(t)$ は各 $t$ において十分 0 に近い関数だが、各 $t$ における値の比を自由に設定できる。この点において、変分のイメージは 1 次元的な微小変化 $dt$ と大きく異なる。

[*4] 最小作用の原理に基づく議論において、Newton 力学では経験則的に受け入れていた運動方程式の正当性が示されうることは驚くべき事実である。作用反作用の法則や慣性の法則に関しても同様に、最小作用の原理から導くことができる。

## 1.2 ラグランジアンの形式

運動固有量 $L$ は一般に**ラグランジアン**と呼ばれる。今節では、$L(t;q,q')$ の具体的な形式を導く。
前節の議論は、ラグランジアン $L$ の部分を $L+\frac{\partial f(q,t)}{\partial t}$ で置き換えても方程式は依然成立する。また、ラグランジアンに任意定数をかけても問題はない。このように、運動固有量は一種の任意性を持つ物理量である。

$L$ の具体的な性質を考えるため、最も簡単な場合として自由な質点のラグランジアンを考える。質点が自由というのは、場が静的（時間に対して一様かつ等方的）かつ平坦（空間に対して一様かつ等方的）という意味である。この場合、運動に関する情報量 $L$ は $t,\boldsymbol{r}$ にはよらない。また、$L$ は $\boldsymbol{v}$ の方向にもよらないので、$\boldsymbol{v}$ の絶対値のみで定まる。
数式で記述すると $L=f(v^2)$ について $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=0$ が成り立つ。この式と Euler-Lagrange の運動方程式より、$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=0$ が得られる。つまり、$\boldsymbol{v}$ の関数 $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$ は $t$ によらない。結果、自由な質点の速度 $\boldsymbol{v}$ も $t$ によらない定数であると分かる。（慣性の法則）

慣性の法則が成り立つ系を**慣性基準系**と呼ぶ。慣性基準系に対して等速直線運動をする系もやはり慣性基準系なので、このような慣性基準系は無数にとることができる。ここで、$\boldsymbol{v'}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\varepsilon}$ であるような慣性基準系 K,K' をとる。$\varepsilon$ を十分小さくとると、$(\text{微小量})^2$ のオーダーは無視できて

$$L({v'}^2)=L(v^2+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\varepsilon^2)=L(v^2)+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial v^2}$$

となる。$L({v'}^2),L(v^2)$ はともに Euler-Lagrange の運動方程式の解なので、$2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial v^2}$ も Euler-Lagrange の運動方程式を満たす必要がある。ただし、これは $\boldsymbol{v}$ の向きに依存する値なので、ラグランジアンとは本質的に異なる。結局、この項はラグランジアンの不定性に関する項 $\frac{\partial f(q,t)}{\partial t}$ の 1 つとして解釈するしかない。しかし、$2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$ が既に導関数 $2\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$ の形をしているので、$\frac{\partial L}{\partial v^2}$ は定数であること、すなわち $L=av^2$ が要求される。[*5]

最小作用の原理において、$S=\int_{t_1}^{t_2}av^2dt$ は極小値を取らねばならないので、比例定数 $a$ は 0 以上でなければならない。この $a$ の値の半分を質点の**質量**と定義する。質点系において、質点 $m_1,m_2,\cdots$ 間の相互作用が無視できる場合は $L=\sum_i\frac{m_i{v_i}^2}{2}$ である。相互作用が無視できない場合、何らかの補正項を設ける必要がある。相互作用の情報は各質点の位置のみで決まるので、[*6]

$$L=\sum_i\frac{m_i{v_i}^2}{2}-U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots)$$

と書ける。第 1 項を**運動エネルギー**、$U$ を**ポテンシャルエネルギー**と呼ぶ。この式を Euler-Lagrange の運動方程式に代入すると、$m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}$ となる。この式の右辺を質点に働く**力**と定義する。このように、解析力学では Newton 力学における全ての登場人物の定義をラグランジアンを基盤にして行う。

---

[*5] この形式が $L({v'}^2)=L(v^2)+\frac{\partial f(q,t)}{\partial t}$ を微小でない $\varepsilon$ に対しても満たすかどうか確かめることは重要な姿勢である。実際、$L'=a{v'}^2=av^2+2a\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+a\varepsilon^2=L+\frac{d}{dt}\left(2a\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+a\varepsilon^2t\right)$ となり、ここまでの理論の妥当性が再確認できる。

[*6] 仮に $U$ の値が $\boldsymbol{v_i}$ にも依存する場合、ある質点の存在の影響が他の質点に「伝わる」までに有限の時間を要することになる。この伝わる速さは慣性基準系のとり方によっていくらでも遅くできるので、物理現象が慣性系によって異なることになり、慣性基準系に対して等速直線運動をする系も慣性基準系であるというガリレイの相対性原理の主張に反する。

### 1.3　運動の積分

$q_i, q_i'(i = 1, 2, \cdots, n)$ の関数のうち、運動の間ずっと一定値をとるものを特に**運動の積分**と呼ぶ。自由度が $n$ 個の孤立系において、$2n-1$ 個の運動の積分が存在する。[*7] このうちいくつかは時間及び空間の一様性・等方性に深く関わるものである。以降、それらの形式を導出する。

静的な場を考える。このとき、ラグランジアンは時間によらないので $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ である。あとは全微分の要領で

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} q_i' + \frac{\partial L}{\partial q_i'} q_i'' \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i'} q_i' \right) \longrightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i'} q_i' - L = Const$$

が成立。左辺の保存量を**エネルギー**と呼ぶ。[*8] ラグランジアンの形式 $L(t; q, q') = T - U$ を代入すると、

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i'} q_i' - L = \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i' - L = 2T - (T - U) = T + U$$

となる。ただし、途中の計算で、$T$ が $\{q_i'\}$ の 2 次形式で表されることを用いた。

空間的に一様な場を考える。このとき、質点系における各質点の位置を平行移動 $(\boldsymbol{r_i} \to \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{\delta r})$ してもラグランジアンは変化しないので $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} \cdot \boldsymbol{\delta r_i} = \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} \right) \cdot \boldsymbol{\delta r} = 0$ である。変分 $\boldsymbol{\delta r}$ をどのようにとってもこの等式は成立するので

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} = 0 \longrightarrow \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_i}} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_i}} \right) = 0 \longrightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_i}} = Const$$

左辺の保存量を**運動量**と呼ぶ。また、この式から $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} = \sum_i \boldsymbol{F_i} = 0$（力の釣り合い、作用・反作用の法則）が導ける。

原点に関して空間的に等方な場を考える。このとき、質点系における各質点の位置及び速度を原点に関して回転移動 $(\boldsymbol{r_i} \to \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{\delta\phi} \times \boldsymbol{r_i}, \boldsymbol{v_i} \to \boldsymbol{v_i} + \boldsymbol{\delta\phi} \times \boldsymbol{v_i})$ してもラグランジアンは変化しないので

$$\sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} \cdot \boldsymbol{\delta r_i} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_i}} \cdot \boldsymbol{\delta v_i} \right) = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} \cdot (\boldsymbol{\delta\phi} \times \boldsymbol{r_i}) + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_i}} \cdot (\boldsymbol{\delta\phi} \times \boldsymbol{v_i}) \right) = \boldsymbol{\delta\phi} \cdot \left( \sum_i (\boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p_i'}) + (\boldsymbol{v_i} \times \boldsymbol{p_i}) \right) = 0$$

変分 $\boldsymbol{\delta\phi}$ をどのようにとってもこの等式は成立するので

$$\frac{d}{dt} \sum_i (\boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p_i}) = 0 \longrightarrow \sum_i (\boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p_i}) = Const$$

左辺の保存量を**角運動量**と呼ぶ。導出した 3 種類の保存量はいずれもラグランジアンに関して線形なので、加法性が保証される。

---

[*7] この事実の証明は簡単である。運動方程式の一般解は $2n$ 個の任意定数 $C_1, \cdots, C_{2n}$ を含むが、孤立系に限っていえばそのうち 1 つは「時間の原点をどこにとるか」に関する量であり、それを $2n$ 個の方程式 $q_i = q_i(C_1, \cdots, C_{2n}), q_i' = q_i'(C_1, \cdots, C_{2n})$ から消去すると、残り $2n-1$ 個の任意定数が $q_i, q_i'$ を用いて記述できる。

[*8] これはハミルトニアンと呼ばれることはあるが、エネルギーは時間の一様性に対応する保存量であるのに対して、ハミルトニアン $H(t; q, p)$ はラグランジアン $L(t; q, q')$ のラグランジュ変換、つまり第 2 の運動固有量として捉えるとよい。